

Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas (Fundamental)
15 de febrero de 2000

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -i$, definamos $f(z) = \log(i+z)$ (logaritmo principal).

a) Justifíquese que f es discontinua en los puntos de la forma $\rho - i$, con $\rho < 0$, y holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\rho - i : \rho \leq 0\}$

b) Obténgase la serie de Taylor de f centrada en $z_0 = -1 + i$. Sea ϕ la función suma de dicha serie definida, naturalmente, en su disco de convergencia. Indíquese para qué valores de $z \in \Omega$ se verifica que $f(z) = \phi(z)$.

Solución. a) Sea $\rho < 0$, y $z_n = \rho - i(1 + 1/n)$. Entonces $\{z_n\} \rightarrow \rho - i$, y

$$f(z_n) = \log|i+z_n| + i \arg(\rho - i/n) = \log|i+z_n| - i\pi + i \operatorname{arctg} \frac{-1}{n\rho} \rightarrow \log|\rho| - i\pi$$

mientras que $f(\rho - i) = \log(\rho) = \log|\rho| + i\pi$.

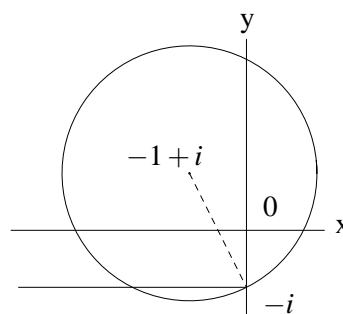
Puesto que el logaritmo principal es holomorfo en el abierto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$, y la función $z \mapsto i+z$ es holomorfa y aplica Ω en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$, se sigue, en virtud de la regla de la cadena, que la función $z \mapsto \log(i+z) = f(z)$ es holomorfa en Ω y además $f'(z) = \frac{1}{i+z}$ para todo $z \in \Omega$.

b) Dado $z_0 \in \Omega$, y supuesto que $|z - z_0| < |i + z_0|$, tenemos que:

$$\frac{1}{i+z} = \frac{1}{i+z_0 + (z-z_0)} = \frac{1}{(i+z_0) \left(1 + \frac{z-z_0}{i+z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{(i+z_0)^{n+1}}$$

Deducimos que $f(z_0) + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(z-z_0)^n}{(i+z_0)^n}$ es la serie de Taylor de f centrada en z_0 , y converge en el disco $D(z_0, |i+z_0|)$. Tomando $z_0 = -1 + i$, entonces $|i+z_0| = |-1+2i| = \sqrt{5}$, por lo que para todo $z \in D(-1+i, \sqrt{5})$ es

$$\phi(z) = f(-1+i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(z-z_0)^n}{(i+z_0)^n}$$



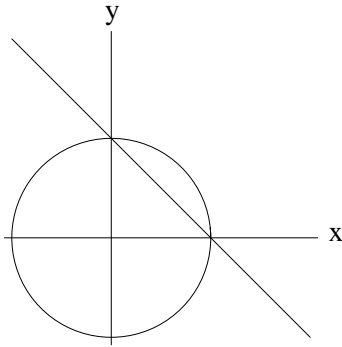
Puesto que para todo $z \in \mathcal{W} = \Omega \cap D(-1+i, \sqrt{5})$ se tiene $f'(z) = \phi'(z)$ y la componente conexa de \mathcal{W} que contiene a $-1+i$ es $\Omega_1 = \mathcal{W} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -1\}$, deducimos que $f(z) = \phi(z)$ para todo $z \in \Omega_1$ (porque la función $z \mapsto f(z) - \phi(z)$ es derivable con derivada nula en el dominio Ω_1 y se anula en el punto $-1+i \in \Omega_1$).

2. Construir un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 1\}$$

sobre el dominio $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Solución.

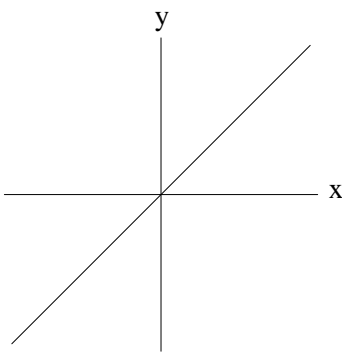


Notemos \mathcal{R} la recta que pasa por los puntos 1 e i ($\infty \in \mathcal{R}$). La transformación de Möbius dada para $z \in \overline{\mathbb{C}}$ por $\varphi(z) = -\frac{z-i}{z-1}$ es tal que $\varphi(\infty) = -1$, $\varphi(0) = -i$. Como los puntos 0 e ∞ son simétricos respecto de la circunferencia $C^*(0,1)$, deducimos que dicha circunferencia se transforma por φ en la recta mediatriz del segmento de extremos $-1, -i$, es decir, en la bisectriz del primer cuadrante. Además, como $\varphi(0) = -i$, deducimos que $\varphi(D(0,1)) =$

$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\}$. La recta \mathcal{R} se transforma por φ en una recta que pasa por $\varphi(i) = 0$ y por $\varphi(\infty) = -1$, es decir, en la recta $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Como $\varphi(0) = -i$, el semiplano $\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 1\}$ se transforma en el semiplano superior $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Deducimos que:

$$\varphi(\Omega) = \varphi(D(0,1) \cap \mathcal{W}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)\} \cap \mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg(z) < \pi/4\}$$

La aplicación $z \mapsto z^2$ es una biyección holomorfa de la región angular $\varphi(\Omega)$ sobre



el cuadrante $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg(z) < \pi/2\}$. Finalmente, la aplicación dada por $\psi(z) = \frac{z-1}{z+1}$ es una transformación de Möbius que lleva el semiplano de la derecha al disco unidad y deja invariante el semiplano superior, luego transforma \mathcal{H} en el dominio $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Concluimos que la aplicación

$$z \mapsto \psi((\varphi(z))^2) = \frac{(z-i)^2 - (z-1)^2}{(z-i)^2 + (z-1)^2}$$

verifica las condiciones deseadas.

3. Dado $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$, calcúlese la integral

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1)} dz$$

Solución. Las raíces de la ecuación $(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1) = 0$ son a y (supuesto $a \neq 0$) $1/a$. Deducimos que

$$(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1) = -a(z - a)(z - 1/a)$$

Descomponiendo en fracciones simples obtenemos:

$$\frac{1}{(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1)} = \frac{1}{1 - a^2} \frac{1}{z - a} - \frac{1}{1 - a^2} \frac{1}{z - 1/a}$$

Así

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{1 - a^2} \int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z - a} dz - \frac{1}{1 - a^2} \int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z - 1/a} dz$$

Si $|a| < 1$, entonces la fórmula de Cauchy para una circunferencia nos da

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z - a} dz = 2\pi i \cos(a)$$

y, por otro lado,

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z - 1/a} dz = 0$$

pues, si $1 < \rho < 1/|a|$, la función $z \mapsto \frac{\cos z}{z - 1/a}$ es holomorfa en el disco $D(0, \rho)$ y puede aplicarse el teorema de Cauchy para dominios convexos. Por tanto, si $|a| < 1$, tenemos que

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1)} dz = 2\pi i \frac{\cos(a)}{1 - a^2}$$

Razonando de forma análoga si $|a| > 1$, obtenemos que en este caso

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1)} dz = -2\pi i \frac{\cos(1/a)}{1 - a^2}$$

4. Sea f una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha \neq 1$ tal que $f(z) = f(\alpha z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

a) Pruébese que, $f(z) = f(\alpha^n z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $z \in \mathbb{C}$, y dedúzcase que, necesariamente, $|\alpha| = 1$.

b) Justifíquese que el conjunto $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es finito y, por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m = 1$.

c) Sea m el menor número natural tal que $\alpha^m = 1$. Justifíquese que hay una función entera g tal que $f(z) = g(z^m)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución. a) Necesariamente $\alpha \neq 0$ (f no es constante) y la hipótesis implica que $f(z/\alpha) = f(z)$. Es inmediato que $f(z) = f(\alpha^n z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (la inducción es casi trivial), lo que junto con que $f(z/\alpha) = f(z)$, permite concluir que dicha igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si $|\alpha| < 1$ la sucesión $\{\alpha^n z\}$ converge a 0 cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$, por lo que $f(z) = f(\alpha^n z) \rightarrow f(0)$, es decir, $f(z) = f(0)$, y f sería constante en contra de la hipótesis. El mismo razonamiento aplicado a $1/\alpha$ implica que tampoco puede ser $|\alpha| > 1$. Concluimos que $|\alpha| = 1$.

b) La función $g(z) = f(z) - f(\alpha)$ es entera, no constante, y se anula en todos los puntos del conjunto $\{\alpha^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Deducimos que dicho conjunto no tiene puntos de acumulación, y como, en virtud del apartado anterior, sabemos que está acotado, concluimos (por el teorema de Bolzano-Weierstrass) que es finito. Luego tiene que haber, números enteros $p \neq q$ tales que $\alpha^p = \alpha^q$. Si $m = |p - q|$ entonces $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha^m = 1$.

c) La existencia del *mínimo* número $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^m = 1$ es consecuencia directa del apartado anterior. Se deduce fácilmente que $\alpha^n = 1$ si, y sólo si, n es múltiplo de m . Puesto que $f^{(n)}(z) = \alpha^n f^{(n)}(\alpha z)$, haciendo $z = 0$ se tiene que $f^{(n)}(0) = \alpha^n f^{(n)}(0)$ lo que implica que $f^{(n)}(0) = 0$ si $\alpha^n \neq 1$, es decir si n no es múltiplo de m . Finalmente, en virtud del teorema de Taylor, sabemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ es:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(km)}(0)}{km!} z^{km} = g(z^m)$$

donde

$$g(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(km)}(0)}{km!} z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

5. Sea f una función entera no constante. Dado un número $\rho > 0$, definamos:

$$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}, \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \rho\}$$

a) Pruébese que la adherencia de E_ρ es igual a F_ρ .

b) Justifíquese que en cada componente conexa acotada de E_ρ hay por lo menos un cero de f .

Solución. a) Evidentemente, $E_\rho \subseteq F_\rho$. La continuidad de f implica que F_ρ es cerrado, por lo que $\overline{E_\rho} \subseteq F_\rho$. Para probar la inclusión contraria, bastará probar que si $|f(z)| = \rho$ entonces $z \in \overline{E_\rho}$. Ahora bien, si $|f(z)| = \rho > 0$, se sigue de las hipótesis hechas y por el principio del módulo mínimo, que el módulo de f no puede tener un mínimo relativo en z , es decir, cualquiera sea el disco $D(z, \varepsilon)$ tiene que haber puntos $w \in D(z, \varepsilon)$ tales que $|f(w)| < \rho$, esto es, $D(z, \varepsilon) \cap E_\rho \neq \emptyset$, lo que prueba que $z \in \overline{E_\rho}$.

b) Sea Ω una componente conexa acotada de E_ρ . Es claro que para todo $z \in Fr(\Omega)$ se tiene que $|f(z)| = \rho$. Por el principio del módulo máximo

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in Fr(\Omega)\} = \rho$$

La función $z \mapsto |f(z)|$ tiene que alcanzar un mínimo absoluto en $\overline{\Omega}$, y dicho mínimo no puede alcanzarse en la frontera pues en tal caso se tendría que $\min\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \rho$ y la función $z \mapsto |f(z)|$ sería constante en Ω lo que implicaría que f es constante en Ω y, por el principio de identidad, sería constante en \mathbb{C} , contra la hipótesis hecha. Concluimos que dicho mínimo se alcanza en un punto $z_o \in \Omega$ y, por el principio del módulo mínimo, concluimos que $f(z_o) = 0$.